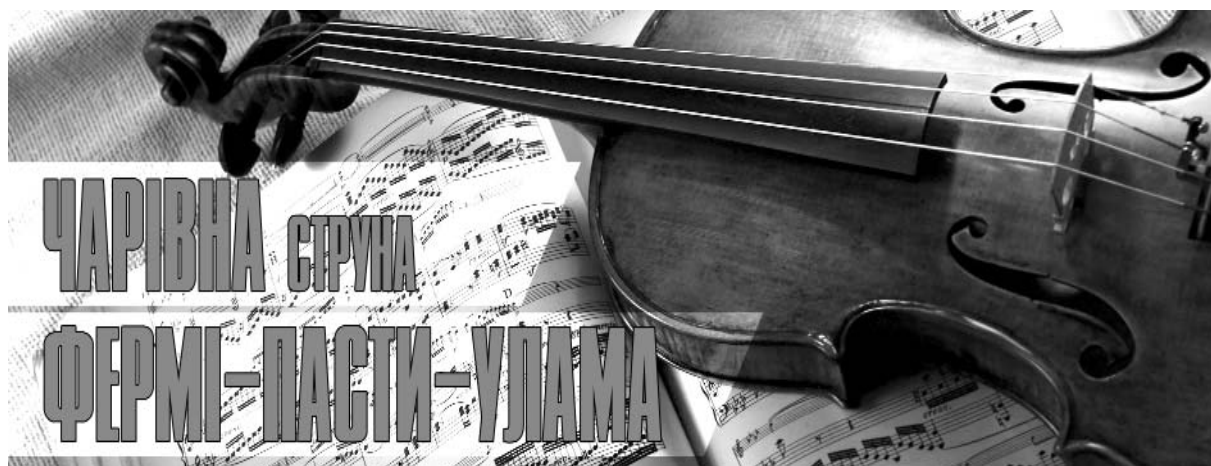




*Что творится, что творилось
На твоей земле,
Всё в этой музыке,
Ты только улови*

Костянтин Нікольський
«Музикант»

Народний фольклор багатий на всілякі чарівні предмети, що полегшують або прикрашають життя людини. Згадаємо хоча б килим-літак, скатертину-самобранку, чоботи-сорокоходи. Науково-технічний прогрес дозволив багато з цих дивовижних речей у той або інший спосіб утілити в реальність. Але дещо на разі чекає свого часу.

Візьмемо, наприклад, гуслі-самогуди. Можна, звичайно, вважати, що їх основну функцію («самі заводяться, самі грають» – В.Даль) виконують магнітофони, радіоприймачі та програвачі лазерних дисків. Проте, якщо уважно читати першоджерела, в народних казках описаний не просто звуковідтворювальний пристрій, а інструмент, здатний безперервно генерувати різні мелодії, які не повторюються. Чи реально створити такий інструмент? Комп'ютерні програми, що створюють музику, не будемо брати до уваги. Сучасна фізика здатна дати підказку і для цього, здавалося би, фантастичного проекту.

Струнні музичні інструменти людина відкрила у найдавніші часи. Цілком імовірно, що винахідником міг виявитися первісний мисливець, який одного разу випадково зачепив натягнуту тятіву лука і почув приймний звук. Тоді й народився перший струнний щипковий інструмент. З часом до однієї струни-тятиви стали додавати інші. Їх робили різної довжини і товщини, натягували з різною силою. Залежно від цього, вони звучали по-різному: одні вище, ін-

ші нижче. Так виникли прадавні струнні інструменти: *кіфара* і *арфа*.

Хтось із древніх музикантів помітив: якщо струни натягнуті на порожній ящик, звук стає більш гучним і красивим. Такі ящики, які згодом назвали резонаторами, стали робити різної форми і величини, струни до них прикріплялися неоднаково. Кращим матеріалом для ящика виявилось дерево. З нього виходили найдзвінкіші, найлегші і найчутливіші корпуси струнних інструментів. Для струн теж випробовували багато матеріалів: і кручену кору дерев, і нитки бамбука, і бичачі жири, і сушені мавпячі кишки, і, звичайно, метал. Так з'явилися найрізноманітніші інструменти: *лютня, гітара, мандоліна, бандура* і ... наші *гуслі, поки ще не «самогуди»*.

Ще пізніше хтось з музикантів замислився: щипок або удар викликає короткий звук. А чи не можна зробити, щоб звук тягнувся? І з'явився смичок – паличка з натягнутим на неї пучком кінського волоса, яким вели по струні. При цьому струна звучала довго, увесь час, доки смичок торкався її. В результаті народилися струнні смичкові інструменти – *скрипка, альт, віолончель*.

Перші дослідження природи звуку, фізичних і механічних основ будови музичних інструментів, що дійшли до нас, почали проводитися в Древній Греції. Ще *Піфагор* відмічав зв'язок між висотою тону і довжиною струни, яка його породжує. Коливання струн активно вивчали з початку XVII століття видатні учені свого часу: *Ньютон, Юнг, Лейбніс, Бернуллі*. Вони заклали основи теорії, якою фізики успішно користуються і сьогодні.

Основні закономірності коливань струни можна встановити за допомогою простої і на-

очної моделі, ідея якої належить *Ісааку Ньюто-ну*. Великий англійський учений, розглядаючи поширення хвилі в середовищі, припустив, що кожна частинка середовища коливається подібно до пружинного маятника, і рух кожної частинки впливає на рух частинок (найближчих сусідів), що оточують її.

Розглянемо довгий ланцюжок кульок масою m , зв'язаних пружинами з однаковими коефіцієнтами пружності і закріплених по краях (Рис.1-а). Фізики називають таку систему *моделью одновимірного кристала*. Будь-яка пара сусідніх кульок взаємодіє згідно закону Гюка, тобто сила взаємодії пропорційна відхиленню: $F = -kx$. Знак «-» означає, що сила спрямована проти напрямку відхилення. В стані рівноваги усі кульки знаходяться у фіксованих точках, на однакових відстанях одна від одної.

У цій системі можна збудити пружну хвилю, змістивши одну з кульок відносно точки рівноваги, а потім її відпустивши. Змістити кульку можна як уздовж осі ланцюжка, так і перпендикулярно до неї. У першому випадку ми отримаємо поперечну хвилю, в другому – поперечну, таку, що відповідає коливанням натягнутої струни в музичному інструменті. З точки збудження побіжать дві хвилі в протилежні сторони. Дійшовши до закріплених кінців, хвилі відіб'ються і побіжать назад. Оскільки ці хвилі когерентні (тобто різниця фаз між ними постійна у часі), при їх складанні утворюється стійка інтерференційна картина. У тих точках струни, де коливання, що викликаються обома хвилями, однакові по фазі, зміщення від положення рівноваги змінюватимуться з подвоєною амплітудою. Такі точки прийнято називати *пучностями*. Точки струни, куди приходять хвилі з протилежними фазами, залишаються в спокої. Такі точки називають *вузлами*. Відстань між найближчими вузлами (або пучностями) дорівнює половині довжини хвилі.

Ані вузли, ані пучності уздовж струни не переміщуються під час коливань. Такі коливання струни, що встановилися, називають *стоячою хвилею*. Очевидно, що стояча хвиля може утворитися в струні, закріпленій з двох сторін, тільки у тому випадку, якщо її довжина кратна цілому числу півхвиль.

Якщо ми відтягнемо і відпустимо струну строго посередині, вона здійснюватиме коливання, показані на малюнку 1-б. Частота таких коливань відповідатиме *основному тону* струни.

Відтягнувши і відпустивши струну у іншому місці, можна збудити й інші стоячі хвилі, при яких струна наче розділяється на дві, три і більше частин (мал. 1-в, г), кожна з яких коли-

вається з частотою, удвічі, втричі і т. д. більшою, ніж частота, що відповідає основному тону. Такі коливання теж передаються навколишньому повітрю і доходять до слухача разом з основним тоном. Називаються вони *обертонами*. Інтенсивність звуків обертонів набагато менша за інтенсивність основного звуку, але людський слух здатний уловити їх звучання. Обертони забарвлюють звук основного тону, надають йому особливу якість, що називається *тембром*. Залежить тембр від числа збуджуваних обертонів і від їх відносної інтенсивності. Тому, навіть при однаковій висоті звучання основного тону, звук, наприклад, скрипки відрізняється на слух від звуку рояля.

Виходячи з уявлень про фізичну природу коливань, *Данило Бернуллі* розвинув ідею про те, що довільне коливання може бути представлене як «накладання» або сума декількох чистих коливань (принцип суперпозиції), що відповідало спостереженням за струною: видаваний нею звук складається з основного тону і безлічі обертонів.

На мові сучасної математики ту ж ідею можна виразити у наступний спосіб («Країна знань» №3, 2012). Звуковий сигнал, подібно до математичної функції, можна розкласти в ряд, тобто представити у вигляді набору складових, що входять в нього, синусоїдальних коливань (*гармонік* або *мод*), кожне з яких має свою власну амплітуду, частоту і фазу. Такий ряд називають частотним спектром, який зазвичай представляють діаграмою у вигляді набору вертикальних ліній, довжини яких пропорційні амплітудним значенням складових гармонік, а місце на горизонтальній осі визначається частотою (номером гармоніки) цієї складової.

Будь-яке, навіть найскладніше за формою коливання (наприклад, звук голосу людини),



Рис.1 (а) Кульки на пружинках моделюють струну, (б) –(г) – можливі типи коливань (моди) струни

можна представити у вигляді суми простих синусоїдальних коливань певних частот і амплітуд.

Як зазначалося вище, звучання будь-якого музичного інструменту є складним і містить безліч частотних складових. Тобто, окрім висоти звучання слух здатний оцінити його тембр, який визначається повним спектральним складом звучання і інтенсивністю спектральних складових. Кожен музичний інструмент характеризується своїм унікальним спектром звучання (рис. 2).

Але навіть і для однотипних музичних інструментів тембр звучання може істотно відрізнятися. В той час, як частота основного тону залежить від довжини, густини і сили натягу струни, повний спектр визначається безліччю чинників: формою, пропорціями, матеріалом, покриттями. Видатні майстри минулого, такі



Рис. 2. Частотні спектри стійких тонів деяких музичних інструментів

як Страдіварі, Гварнері, Амати, створювали свої шедеври з їх неповторним тембром на основі традицій і таємниць ремесла, відкритих дослідним шляхом їх предками.

Модель кульок на пружинках виявилася настільки ефективною, що вже в XX столітті її успішно використали для опису властивостей кристалічних ґраток. Так, розгляд простого одновимірного ланцюжка з позицій квантової механіки, привів до появи поняття **фонон** — елементарного збудження коливань ґратки, яке поводить себе подібно до звичайної частинки. Вивчення фононів допомагає зрозуміти і передбачити багато електричних, теплових і оптичних властивостей речовини.

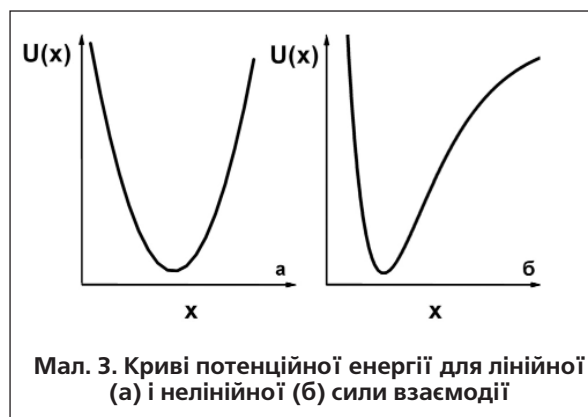
Однією з важливих проблем фізики твердого тіла є задача про *дисипацію* (лат. *dissipatio* — розсіювання) енергії в ґратках. Так називають процес переходу частини енергії впорядкованих процесів, наприклад, поширення зву-

ку, в енергію нерегулярних процесів, врешті — в теплоту.

У розглянутій вище моделі струна передбачалася абсолютно пружною, тобто, кульки коливалися на пружинках без затухання. У реальній струні, так само як і пружині, коливання з часом затухають, кінетична енергія коливань перетворюється на енергію хаотичного руху атомів речовини пружини або струни. У випадку лінійної моделі, а саме, коли кульки на пружинках взаємодіють згідно із законом, який описується лінійною функцією $F = -kx$, прямий перехід в тепло — єдиний шлях дисипації енергії.

Потенційна енергія вантажу на пружинці лінійного маятника квадратично залежить від зміщення, і дорівнює $U(x) = kx^2 / 2$ (рис.2-а). Такий маятник здійснює гармонічні або затухаючі коливання, які наочно можна представити як рухи кульки під дією сили тяжіння в ямі параболічної форми без тертя або з тертям. У лінійному наближенні задача про коливання ґратки і дисипації енергії в ній розв'язується аналітично. Іншими словами, лінійна модель дозволяє вивести базові співвідношення у вигляді алгебраїчних формул.

Коли йдеться про коливання реальної кристалічної ґратки, необхідно врахувати нелінійність взаємодії між її атомами. Наприклад, взаємодію атомів в двоатомній молекулі зазвичай описують потенціалом Морзе (рис.2-б). У ямі відповідної форми кулька здійснює все ще періодичні (якщо не враховувати тертя), але вже не гармонічні коливання: вправо від точки рівноваги вона відхиляється далі, ніж вліво. Чим більше амплітуда, тим сильніше ця відмінність.



Мал. 3. Криві потенційної енергії для лінійної (а) і нелінійної (б) сили взаємодії

Задачі, пов'язані з коливаннями нелінійного ланцюжка, в загальному випадку не мають аналітичного рішення. Необхідно звертатися до чисельних методів і до допомоги електронно-обчислювальної машини.

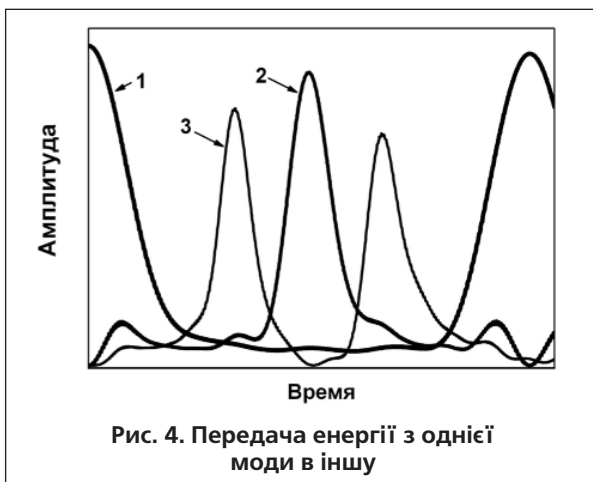


Рис. 4. Передача енергії з однієї моди в іншу

Енріко Фермі – один з найвидатніших фізиків XX століття, теоретик і експериментатор разом з молодими математиками Станіславом Уламом і Джоном Пастою в 1952 р. задумав виконати великі машинні експерименти з дослідження нелінійних задач. Першою з них і була задача про породження теплового хаосу в ланцюжку кульок з нелінійними пружинками.

Результати обчислень, проведених на електронно-обчислювальній машині МАНІАК в знаменитій Лос-Аламоській лабораторії, виявилися цікавими і дуже несподіваними для Фермі. На його думку, вони стали деяким одкровенням. Машина зуміла настільки здивувати Фермі, що він, вже смертельно хворий, цікавився продовженням розрахунків і говорив, що це одна з найважливіших задач, з якими він коли-небудь зустрічався. Що ж так уразило Фермі?

Учені запропонували машині розрахувати коливання системи з 32 кульок, пов'язаних пружинками, які при розтягуванні їх на x створюють попертальну силу, що дорівнює $F = -kx - ax^2$. Таким чином, машина повинна була розв'язувати систему з 32 нелінійних рівнянь. У випадку $a=0$ коливання ланцюжка, як згадувалось вище, можна представити як суму синусоїдальних гармонік (мод), амплітуда яких за відсутності a не міняється з часом. За умови $a \neq 0$ моди перестають бути незалежними, і енергія повільно (в порівнянні з їх періодами) перекачується з однієї моди в іншу.

Фермі зі своїми колегами припускали, що з часом енергія рівномірно розподілиться по усіх модах, що і відповідатиме уявленням про дисипацію енергії в нелінійних ґратках. Проте вийшло інакше.

Нехай в початковий момент часу збуджена одна 1-а мода, що відповідає основному тону. Спочатку дійсно починається перекачування

енергії в інші моди. Проте ніякої хаотичності в цьому не спостерігається (мал. 3). За деякий час уся енергія передається в основному 3-й моді. Потім починає «виконувати» solo 2-а мода і повторно 3-я. Нарешті, майже уся енергія знову повертається в 1-у моду. Крім того, попутно «збуджуються» і «заспокоюються» і більш високі моди.

Така дивна поведінка нелінійного ланцюжка не укладалася в існуючі уявлення, і її назвали *парадоксом Фермі-Пасти-Улама*. Подальші дослідження показали, що ніякого парадоксу насправді не існує. Нелінійні системи часто поведуться незвично. Наприклад, в нелінійному ланцюжку можна збудити ізольовану хвилю (*солітон*), яка може служити математичною моделлю грізної океанської хвилі – цунамі («Країна знань» №4-5, 2009).

Уявимо, що таким хитромудрим чином коливається струна. Звучання, що породжується її коливаннями, не зливається в загальний безладний хор, а виділяє декілька солістів, які виступають по черзі, інші їм акомпанують. Коли повертається перший соліст, усе починається спочатку! У проміжках між «сольними партіями» безперервно змінюється тембр звучання. Залежно від інтенсивності спектральних складових в якийсь момент часу струна може зазвучати як скрипка, потім як баян і трохи пізніше як шотландська волинка! Неважко уявити, що знайдеться такий крихітний інтервал часу, коли ми почуємо звучання скрипки Страдіварі.

Характер зміни амплітуди мод з часом залежить від величини нелінійності, в нашому випадку – від чисельного значення параметра a , який грає роль «диригента оркестру». Чим більше цей параметр відрізняється від нуля, тим слабше проявляється періодичність окремих «партій» в звучанні струни і тим складнішою стає «музика». У разі сильної нелінійності інтенсивність мод починає залежати від часу хаотично і непередбачувано. Дивно, що хаос виникає в порівняно простій механічній системі, параметри якої точно визначені. Таку поведінку системи означили терміном – *детермінований хаос*.

Отже, замість очікуваної какофонії, коли одночасно звучать з однаковою силою усі моди, виходить примітивна, але цілком музична п'єса. Втім, з однакових нот, що належать різним октавам, приємної для слуху мелодії ми не отримуємо. До гусел-самогудів ще занадто далеко.

У який спосіб можна збільшити число нот, що залучаються до мелодії? Надзвичайно ши-

рокі можливості щодо цього відкриває перехід до просторово *неоднорідної* струни.

Досі в якості моделі струни ми розглядали систему *однакових* кульок і пружинок. Що буде, як зробити їх різними?

По-перше, можна підпорядкувати коефіцієнт пружності пружинок або масу кульок певній залежності від положення в просторі, іншими словами, задати функції $k(x)$ або $m(x)$. Якщо ці залежності досить плавні, коливання такої струни можна представити як суму елементарних, але тепер вже не *синусоїдальних* коливань. У спектрі з'являться складові з комбінованими і нецілими частотами. Звучання нелінійної неоднорідної струни стане значно багатшим, ніж однорідної.

По-друге, можна задати конкретне значення коефіцієнта пружності та/або маси кожному елементу ланцюжка. І тут для можливості генерації безперервної послідовності звуків відкриваються справді безмежні можливості. Наприклад, просторові неоднорідності можна задати у такий спосіб, щоб серед великої кількості збуджуваних мод, переваги мали моди певних частот, що відповідають нотам *до, ре, мі, фа, сі, ля, сі*. У струні такого типу теоретично можна буде збудити будь-яку мелодію із вже вигаданих або ще доки виношуваних в головах композиторів.

Звичайно, такий спосіб створення музики нагадує так званий *Парадокс про мавпу за друкарською машинкою*: мавпа, ударяючи випадковим чином по клавішах, впродовж необмежено довгого часу, рано чи пізно надрукує будь-який наперед заданий текст. Можна переформулювати це твердження з урахуванням осяжного масштабу, тобто, прибрати необмеженість часу. Тоді, якщо впродовж тривалого часу випадковим чином стукати по клавіатурі, то серед тексту, що набирається, виникатимуть осмислені слова, словосполучення і навіть речення.

Відмінність генерації мелодії нелінійною і неоднорідною струною від набору безглузлого тексту полягає в тому, що перший процес зовсім не випадковий. Як згадувалося вище, коливання навіть найскладнішої по структурі струни підкоряються цілком визначеним правилам і описуються цілком визначеними рівняннями. Це означає, що теоретично можна виготовити таку струну, яка в деякий момент часу зіграє задану мелодію заданим музичним інструментом. З чого і за яким алгоритмом створити таку струну – доки невідомо. Проте цю задачу не варто вважати принципово нерозв'язною і, тим більше, абсурдною.

У сучасній прикладній математиці є дуже популярним так званий *нелінійний аналіз часових рядів*. У техніці, природі і повсякденному житті часто спостерігаються складні нерегулярні процеси з усіма ознаками детермінованого хаосу. Наприклад, в науковій лабораторії такі процеси можна спостерігати в електричних схемах, лазерах, хімічних реакціях, динаміці рідин і магнітно-механічних пристроїв. У природі ознаки хаотичної поведінки спостерігається в сонячній активності, русі супутників сонячної системи, еволюції магнітного поля астрономічних тіл. Також можна згадати електроенцефалограму (ЕЕГ) у фізіології і біржовий курс в економіці. Кожен процес описують часовим рядом – послідовністю значень деякого параметра, зареєстрованого в різні моменти часу.

Практичні задачі, які виникають при аналізі часових рядів, можуть бути найрізноманітнішими. Наприклад, для діагностики захворювань важливо з'ясувати природу аритмій ЕЕГ. Або (мрія будь-якого фінансиста!) спрогнозувати курс акцій хоча б на найближче майбутнє. У будь-якому випадку, з часового ряду необхідно дістати інформацію про механізми, що породжують нерегулярну, але детерміновану поведінку системи. В ідеалі – це набір рівнянь, яким вона підкоряється. Нині вчені здатні визначити кількість таких рівнянь, взаємозв'язки між ними, вагу тих або інших параметрів. Робота в цьому напрямі активно продовжується.

Музичний твір – це теж нерегулярний часовий ряд з ознаками детермінованого хаосу. Можна пофантазувати, що в майбутньому, можливо, не дуже віддаленому, ми навчимося записувати систему рівнянь улюбленої мелодії, а також виготовляти (реально або віртуально) за нею струну, яка видаватиме послідовність *живих* звуків на будь-якому, найекзотичнішому інструменті.

А.В. Якунов,

доцент кафедри оптики фізичного факультета
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
yakunov@univ.kiev.ua